Anexo

Algunos conceptos matemáticos con los que debe familiarizarse

Esta sección le ayudará a repasar sus conocimientos del léxico matemático y de los conceptos que se necesitan frecuentemente para resolver problemas.

Aritmética:
aplicaciones que requieran efectuar operaciones con números racionales (adición, sustracción, multiplicación y división), números pares e impares, números primos, razón, proporción, por cientos, y otros conceptos fundamentales relacionados con numeración.

Álgebra:
propiedades de los números reales, sustitución, factorización, simplificación de expresiones algebraicas, ecuaciones lineales, desigualdades lineales, exponentes enteros positivos, radicales, sucesiones, sistema de coordenadas rectangulares, y otros conceptos básicos de álgebra elemental.

Geometría:
ángulos y su medición; propiedades de los triángulos rectángulos, isósceles y equiláteros; propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares, perímetro de polígonos; área de polígonos; circunferencia y área de un círculo; volumen de un sólido rectangular y otros conceptos básicos de geometría elemental.

Estadística:
lectura e interpretación de tablas y gráficas; media o promedio aritmético; y probabilidad de un evento simple.

Términos que debe conocer

CUANDO VEA	PIENSE EN
Números enteros positivos	1, 2, 3, 4, ...
Números enteros negativos	–1, –2, –3, – 4, ...
Números enteros	... , – 4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ...
Números impares	... , – 9, –7, –5, –3, –1, 1, 3, 5, 7, 9, ...
Números pares	... , – 8, – 6, – 4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, ...
Números enteros consecutivos	n, $n+1$, $n+2$, ... (n = número entero) Ejemplo: 22, 23, 24
Números primos	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
Promedio	La suma de los términos dividida por el número de términos. Ejemplo: el promedio de 9, 11, y 16 es igual a $\frac{9+11+16}{3}=12$

Conceptos que debe conocer

Números impares y números pares

Suma:
par + par = par
impar + impar = par
par + impar = impar

Multiplicación:
par × par = par
par × impar = par
impar × impar = impar

Porcentaje

El porcentaje es un número expresado como una fracción de 100, de modo que $\frac{40}{100}=40$ por ciento; y 3 es el 75 por ciento de 4 (Recuerde: $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=75$ por ciento)

Algunos equivalentes en por ciento

$$\frac{1}{10} = 0.1 = 10\%$$
$$\frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$$
$$\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$
$$\frac{1}{1} = 1.0 = 100\%$$
$$\frac{2}{1} = 2.0 = 200\%$$

Procedimiento para convertir una fracción $\frac{a}{b}$ a un por ciento

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}$$

$$x = 100\left(\frac{a}{b}\right)$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100}$$

Por lo tanto,

$$x = 100\left(\frac{3}{4}\right) = 75$$
$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$$

Nota: En términos generales, se observa que para convertir una fracción o un decimal a un por ciento, se multiplica por 100.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5} \times 100 = \frac{200}{5} = 40\%$$

$$0.67 \times 100 = 67\%$$

Problema 1

¿5 es qué por ciento de 2?

Solución:

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{100}$$
$$x = \frac{500}{2} = 250$$

Por lo tanto,

$$\frac{5}{2} = \frac{250}{100} = 250\%$$

Por lo tanto, 5 es el 250% de 2. Observe que esto equivale a decir que 5 es $2\frac{1}{2}$ veces 2.

Problema 2

Rita ganó \$10 el lunes y \$12 el martes. ¿Qué por ciento es la cantidad que ganó el martes de la cantidad que ganó el lunes?

Un ejercicio equivalente es: ¿\$12 es qué por ciento de \$10?

Solución:

$$\frac{12}{10} = \frac{x}{100}$$
$$x = \frac{1200}{10} = 120$$

Por lo tanto,

$$\frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\%$$

Problema 3

¿Qué por ciento de 1,000 es 3?

Solución:

$$\frac{3}{1{,}000} = 0.003 \times 100 = 0.3\%$$

ó $\frac{3}{10}$ de 1 por ciento

Problema 4

Los calcetines se venden a \$1.00 el par o a 2 pares por \$1.99. Si José compra 2 pares, ¿qué por ciento del costo total se ahorra, a razón del precio de un solo par?

Solución:

A razón del precio de un solo par, 2 pares costarían \$2.00. Se ahorra solamente \$0.01. Por lo tanto, hay que contestar la pregunta: ¿Qué por ciento de \$2.00 es \$0.01?

Toda vez que

$$\frac{0.01}{2.00} = \frac{x}{100}$$

$x = \frac{1}{2} = 0.5$, el ahorro es de

solamente 0.5%, esto es $\frac{1}{2}$ de 1 por ciento.

Velocidad promedio

Problema

Laura viajó durante 2 horas a razón de 70 kilómetros por hora y durante 5 horas a razón de 60 kilómetros por hora. ¿Cuál fue su velocidad promedio durante el período de 7 horas?

Solución:

En esta situación, la velocidad promedio es igual a $\frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo total}}$.

La distancia total es 2(70) + 5(60) = 440 kms. El tiempo total es de 7 horas. Por tanto, la velocidad promedio fue $\frac{440}{7} = 62\frac{6}{7}$ kilómetros por hora. Note que en este ejemplo la velocidad promedio, $62\frac{6}{7}$, **no es el promedio** de dos velocidades separadas, que sería en ese caso 65.

Conceptos de álgebra

El cuadrado de algunos números enteros

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

n	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Propiedades de los números con signos

positivo × positivo = positivo

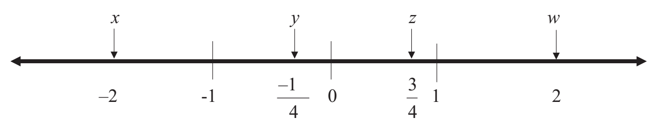
negativo × negativo = positivo

negativo × positivo = negativo

$-(a-b) = b-a$

$(-x)^2 = x^2$

Observe que si $x < 0$, entonces $x^2 > 0$. Es decir, si x es un número negativo entonces, el cuadrado de x es un número positivo.



En la recta numérica que aparece arriba:

$x < y$ Por ejemplo, $-2 < -\frac{1}{4}$

$y^2 > 0$ Por ejemplo, $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 > 0$

$z^2 < z$ Por ejemplo, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \frac{3}{4}$

$x^2 > z$ Por ejemplo, $(-2)^2 > \frac{3}{4}$

$z^2 < w$ Por ejemplo, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 < 2$

$x + z < 0$ Por ejemplo, $(-2) + \frac{3}{4} = -1\frac{1}{4}$

$y - x > 0$ Por ejemplo, $\left(-\frac{1}{4}\right) - (-2) = \left(-\frac{1}{4}\right) + (+2) = 1\frac{3}{4}$

Factorización (algunos casos sencillos comunes)

$x^2 + 2x = x(x+2)$

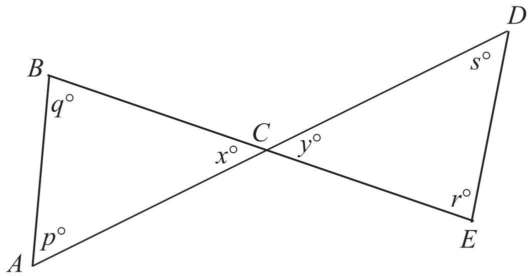
$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$

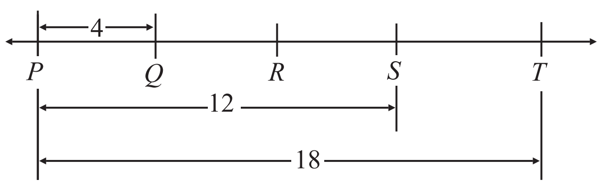
$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

Conceptos de geometría

Las figuras que acompañan a los ejercicios en la prueba tienen el propósito de proveerle información útil para resolver los problemas. Las figuras están dibujadas con la mayor precisión posible, excepto cuando se indique lo contrario. Cuando las líneas parecen rectas, puede presumirse que son rectas. A continuación aparecen varios ejemplos que ilustran formas de interpretar las figuras.

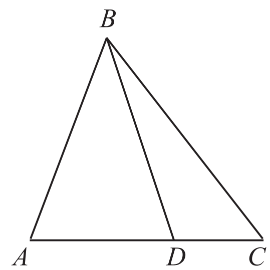


En esta figura, se puede presumir que AD y BE son segmentos de rectas que se interceptan en C. NO se debe presumir que $AC = CD$, que $p = 60$ ni que $r = 90$, aunque pueda parecer que tienen esos valores. Toda vez que $\angle ACB$ y $\angle DCE$ son ángulos verticales (opuestos por el vértice), usted puede concluir que $x = y$.



NOTA: La figura no está dibujada a escala.

Aun cuando la nota indica que la figura no está dibujada a escala, se puede presumir que los puntos P, Q, R, S y T están en la recta PT. También se puede presumir que Q queda entre P y R, que R queda entre Q y S, y que S está entre R y T. No se puede presumir que PQ, QR, RS y ST tienen largos iguales. De hecho, toda vez que los largos de PT y PS se señalan de 18 y 12, respectivamente, el largo de ST es 6 mientras que PQ tiene un largo de 4. Por lo general, aun cuando una figura no esté dibujada a escala, puede presumirse que los puntos en la recta están en el orden ilustrado, pero los largos específicos (por ejemplo, PQ y ST) pueden no estar representados con exactitud. En tales casos, la respuesta debe basarse en otra información que se ofrece sobre la figura como, por ejemplo, los largos específicos ilustrados.



NOTA: La figura no está dibujada a escala.

Esta figura tampoco se ha dibujado a escala. Sin embargo, se puede presumir que ABC, ABD y DBC son triángulos, y que D queda entre A y C. Las siguientes observaciones son válidas:

(1) largo $AD <$ largo AC

(2) $\angle ABD < \angle ABC$

(3) Área $\Delta ABD <$ Área ΔABC

Las siguientes observaciones NO son válidas. (Estas afirmaciones pueden ser o no ciertas.):

(1) largo $AD >$ largo DC

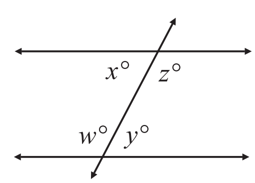
(2) $\angle BAD = \angle BDA$

(3) $\angle DBC < \angle ABD$

Las tres observaciones válidas ilustran que la información sobre la posición relativa de puntos y ángulos puede presumirse de la figura, pero las tres observaciones que no son válidas ilustran que los largos específicos y las medidas en grados pueden no estar trazadas con precisión.

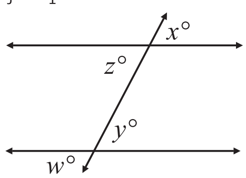
Propiedades de las rectas paralelas

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, los ángulos alternos internos tienen la misma medida. Por ejemplo:



$x = y$
$z = w$

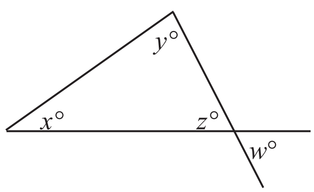
Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, los ángulos correspondientes tienen la misma medida. Por ejemplo:



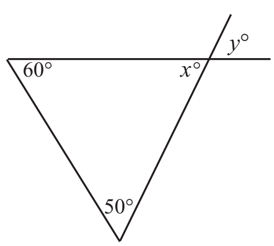
$x = y$
$z = w$

NOTA: Las palabras como “alternos internos” o “correspondientes” generalmente no se usan en la prueba, pero se necesita saber cuáles ángulos tienen la misma medida.

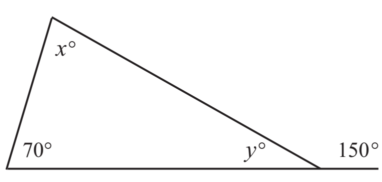
Relaciones entre ángulos



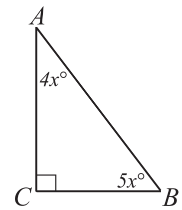
$x + y + z = 180$
(Porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°)
$z = w$
(Cuando dos rectas se interceptan, los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.)



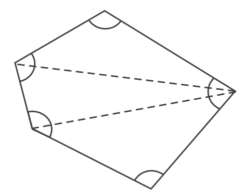
$y = 70$
(Porque x es igual a y, y $60 + 50 + x = 180$)



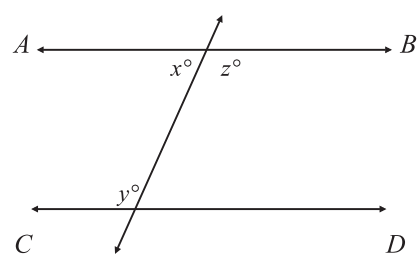
$y = 30$
(Porque la medida de un ángulo rectilíneo es igual a 180°,
$y = 180 - 150$)
$x = 80$
(Porque $70 + 30 + x = 180$)



$x = 10$
(Porque $4x + 5x = 90$)
Además, el lado AC es más largo que el lado BC.
(Porque la medida del ángulo B es mayor que la medida del ángulo A)

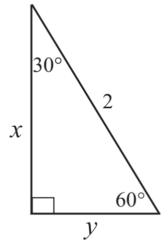


La suma de las medidas de todos los ángulos internos del polígono que aparece arriba es 3 (180°) = 540°, porque puede dividirse en 3 triángulos y la suma de las medidas de los ángulos internos de cada uno de ellos es de 180°.

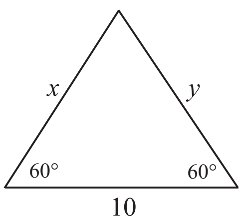


Si $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$, entonces $x + y = 180$
(Porque $x + z = 180$ y $y = z$)

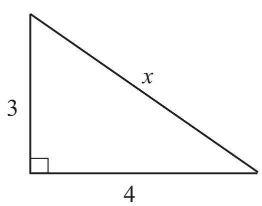
Relaciones entre los lados de un triángulo con respecto a sus ángulos



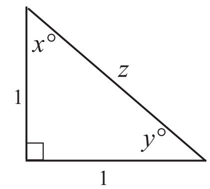
$y = 1$
(Porque el largo del lado opuesto al ángulo de 30° de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la hipotenusa)
$x = \sqrt{3}$
(De acuerdo con el teorema de Pitágoras,
$x^2 + 1^2 = 2^2$
$x^2 = 3$
$x = \sqrt{3}$)



$x = y = 10$
(Porque el ángulo que aparece sin marcar es de 60° ; todos los ángulos de este triángulo miden lo mismo y, por lo tanto, todos los lados tienen igual longitud)



$x = 5$
De acuerdo con el teorema de Pitágoras,
$x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 9 + 16$
$x^2 = 25$
$x = \sqrt{25} = 5$



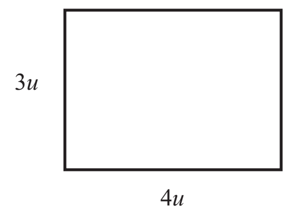
$x = y = 45°$
(Por el hecho de que dos de los lados son iguales, el triángulo rectángulo es isósceles y por eso los ángulos x y y miden lo mismo. También $x + y = 90$, lo cual hace que ambos ángulos sean de 45°)

$z = \sqrt{2}$
(Porque $1^2 + 1^2 = z^2$)

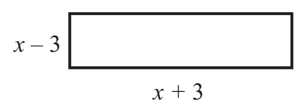
Fórmulas de áreas y perímetros de algunas figuras geométricas

El área de un rectángulo = largo × ancho = $\ell \times a$
El perímetro de un rectángulo = $2(\ell + a) = 2\ell + 2a$

Ejemplo:



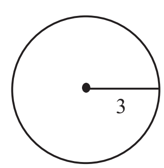
El área = $12u^2$
El perímetro = $14u$



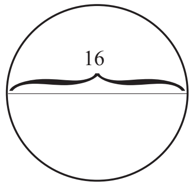
El área = $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$
El perímetro = $2[(x + 3) + (x - 3)] = 2(2x) = 4x$

El área de un círculo = πr^2 (en esta fórmula r es el radio). La circunferencia = $2\pi r = \pi d$ (en esta fórmula d es el diámetro).

Ejemplos:

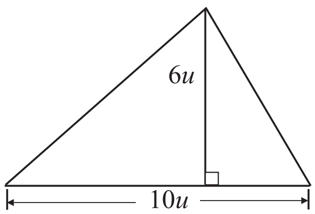


El área = $\pi(3^2) = 9\pi$
La circunferencia = $2\pi(3) = 6\pi$

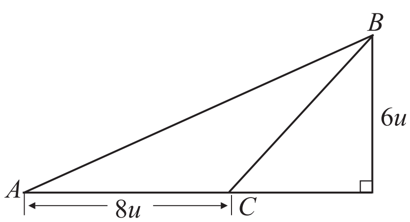


El área = $\pi(8^2) = 64\pi$
La circunferencia = $\pi(16) = 16\pi$

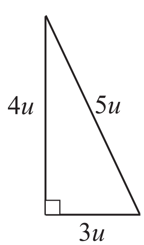
El área de un triángulo=
$\frac{1}{2}$ (altura × base) = $\frac{1}{2}$ $(a \cdot b)$



Área $= \frac{1}{2}(6 \cdot 10) = 30u^2$

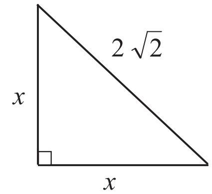


Área $= \Delta ABC = \frac{1}{2}(6 \cdot 8) = 24u^2$



Área $= \frac{1}{2}(4 \cdot 3) = 6u^2$

Perímetro $= 4 + 3 + 5 = 12u$

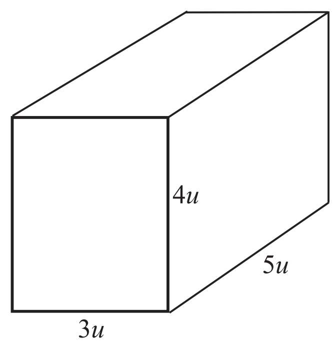


$x = 2$
(Porque $x^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2$)
$2x^2 = 4 \cdot 2$
$x^2 = 4$
$x = 2$)
Área $= \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = 2u^2$
Perímetro $= 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$

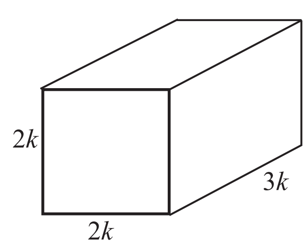
El volumen de un sólido rectangular (una caja)

El volumen de una caja =
largo × ancho × alto = L · A · A

Ejemplos:



Volumen $= 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60u^3$



Volumen $= (3k)(2k)(2k) = 12k^3$